
Έστω οι μεταβλητές A, B, C, D και E, οι οποίες είναι ακέραιες και το αρχικό πεδίο ορισμού τους είναι το $\{1,2,3,4\}$ για κάθε μία από αυτές. Οι περιορισμοί που ισχύουν μεταξύ τους είναι οι:

- $C \neq D$ (1)
- $C > E$ (2)
- $C \neq A$ (3)
- $B > D$ (4)
- $D > E$ (5)
- $B > C$ (6)
- $E + A \bmod 2 = 0$ (7)

α) Σχεδιάστε το γράφο περιορισμών του προβλήματος.

β) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο ελέγχου συνέπειας τόξου, μέχρι να μην μπορούν να αφαιρεθούν άλλες τιμές από τα πεδία των μεταβλητών.

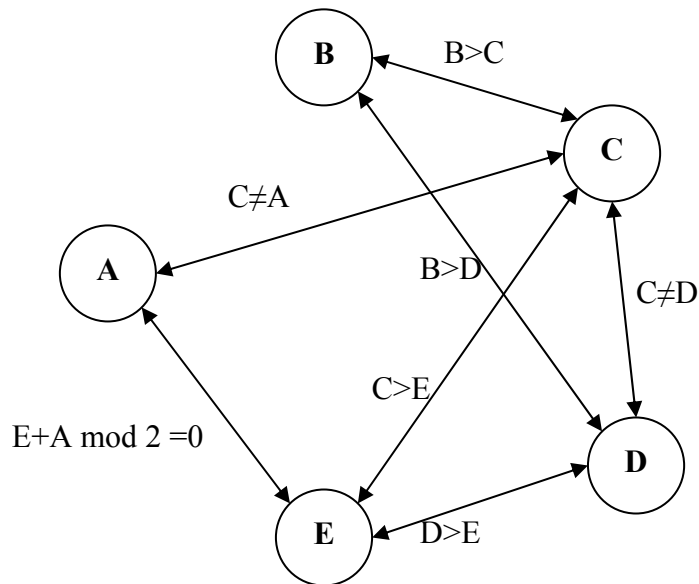
γ) Βρείτε μια λύση του προβλήματος.

Υπόδειξη: Για να βρείτε μια λύση (μετά την απάντηση του ερωτήματος (β)), επιλέξτε να αναθέσετε τιμή στην μεταβλητή που συμμετέχει στους περισσότερους περιορισμούς).

Παρατήρηση: Ο περιορισμός (7) έχει το νόημα ότι το άθροισμα των τιμών της E και της A είναι άρτιος αριθμός. Έτσι εάν όλες οι τιμές της E είναι άρτιες τότε πρέπει και όλες οι τιμές της A να είναι άρτιες και αντίστροφα. Παρόμοια, εάν όλες οι τιμές της E είναι περιττές, τότε πρέπει και όλες οι τιμές της A να είναι περιττές και αντίστροφα. Τέλος, εάν η μία μεταβλητή περιλαμβάνει τόσο άρτιες, όσο και περιττές τιμές στο πεδίο της, το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και με την άλλη.

Απάντηση:

α) Ο γράφος περιορισμών του προβλήματος φαίνεται παρακάτω:



β) Έχουμε καταρχήν να ελέγξουμε όλες τις μεταβλητές, για τις σχέσεις τους με άλλες μεταβλητές. Κάθε φορά που το πεδίο μιας μεταβλητής συρρικνώνεται, θα πρέπει να γίνεται επανέλεγχος για όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές που συνδέονται μαζί της στο γράφο περιορισμών.

Τα αρχικά πεδία τιμών των μεταβλητών είναι τα:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$C = \{1, 2, 3, 4\}$

$D = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{1, 2, 3, 4\}$

Έχουμε να ελέξουμε τις μεταβλητές A, B, C, D και E.

Ελέγχουμε πρώτα την μεταβλητή A. Για όλες τις τιμές του πεδίου της υπάρχουν αντίστοιχες τιμές στα πεδία των σχετιζόμενων μεταβλητών που ικανοποιούν τους περιορισμούς. Έτσι δεν αφαιρούμε καμία τιμή από το πεδίο της A.

Ελέγχουμε στη συνέχεια τη B. Λόγω των περιορισμών $B > C$ και $B > D$, αφαιρούνται οι τιμές 1 από την B και 4 από τις C και D. Τα νέα πεδία τιμών γίνονται:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$C = \{1, 2, 3\}$

$D = \{1, 2, 3\}$

$E = \{1, 2, 3, 4\}$

Με δεδομένο ότι άλλαξε το πεδίο της C, πρέπει να επαναελεγχθεί η A. Ξαναελέγχουμε την A, αλλά δεν προκύπτει αλλαγή στο πεδίο της. Ελέγχουμε στη συνέχεια την C. Λόγω του περιορισμού $C > E$, αφαιρείται η τιμή 1 από την C και οι τιμές 3, 4 από την E. Τα πεδία τιμών γίνονται:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$C = \{2, 3\}$

$D = \{1, 2, 3\}$

$E = \{1, 2\}$

Λόγω των αλλαγών στις C και E πρέπει να ξαναελεγχθούν όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές.

Ελέγχουμε την B και λόγω του περιορισμού $B > C$ αφαιρούμε την τιμή 2 από το πεδίο της B. Τα πεδία τιμών γίνονται:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4\}$

$$C=\{2,3\}$$

$$D=\{1,2,3\}$$

$$E=\{1,2\}$$

Ελέγχουμε την D, η οποία λόγω του περιορισμού $D>E$ χάνει την τιμή 1 από το πεδίο της. Τα πεδία γίνονται:

$$A=\{1,2,3,4\}$$

$$B=\{3,4\}$$

$$C=\{2,3\}$$

$$D=\{2,3\}$$

$$E=\{1,2\}$$

Στο σημείο αυτό δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε καμία τιμή από τα πεδία των μεταβλητών.

γ) Στο σημείο που φθάσαμε δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε άλλες τιμές. Πρέπει λοιπόν να κάνουμε μια αυθαίρετη ανάθεση τιμής και να συνεχίσουμε με τον αλγόριθμο ελέγχου συνέπειας τόξου.

Επιλέγουμε να αναθέσουμε τιμή στη μεταβλητή C, η οποία συμμετέχει στους περισσότερους περιορισμούς (τέσσερις) και έστω ότι της αναθέτουμε την τιμή 3. Έτσι τα πεδία τιμών των μεταβλητών γίνονται:

$$A=\{1,2,3,4\}$$

$$B=\{3,4\}$$

$$C=\{3\}$$

$$D=\{2,3\}$$

$$E=\{1,2\}$$

Λόγω του περιορισμού $B>C$, η τιμή 3 αφαιρείται από το πεδίο της B.

Λόγω των περιορισμών $C\neq D$ και $C\neq A$, η τιμή 3 αφαιρείται και από τα πεδία της D και της A. Έτσι τα πεδία των μεταβλητών γίνονται:

$$A=\{1,2,4\}$$

$$B=\{4\}$$

$$C=\{3\}$$

$$D=\{2\}$$

$$E=\{1,2\}$$

Λόγω του $D>E$ αφαιρείται η τιμή 2 από το E. Εφόσον λοιπόν στο E έχει μείνει μόνο η τιμή 1, η οποία είναι περιττός αριθμός, τότε από το A αφαιρούνται οι τιμές 2 και 4 (λόγω του περιορισμού $E+A \bmod 2 = 0$), γιατί το άθροισμά τους με το 1 δίνει περιττό αριθμό. Τα πεδία λοιπόν γίνονται:

$$A=\{1\}$$

$$B=\{4\}$$

$$C=\{3\}$$

$$D=\{2\}$$

$$E=\{1\}$$

Στο σημείο αυτό όλες οι μεταβλητές έχουν μία μόνο τιμή. Επιπλέον, όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται. Άρα η παραπάνω ανάθεση τιμών αποτελεί λύση του προβλήματος.
